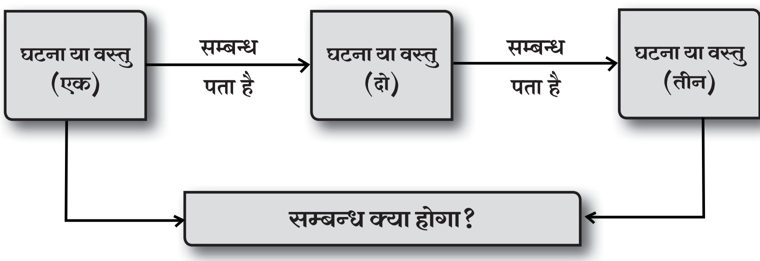
सन्दर्भों में निहित गणितीय सम्भावनाएँ

अशोक प्रसाद

गणितीय अवधारणाओं को सिखाने में सन्दर्भ चयन व भूमिका पर केन्द्रित यह लेख गणितीयकरण व समस्या हल करने के अर्थ को खँगालता है। आसपास उपलब्ध उदाहरणों में कौन-से स्वाभाविक, सटीक और अर्थपूर्ण सन्दर्भ हैं इनकी पहचान सन्दर्भ और अवधारणाओं के सम्बन्ध को उभारेगी। इसी तरह सीखने वाले व जानकार व्यक्ति के बीच खुला संवाद आवश्यक है। लेख गणितीय अवधारणा को समझने की यात्रा को तीन पड़ावों में बाँटता है : 1) सन्दर्भों में निहित अमूर्त विचारों का निरूपण; 2) निरूपण पर सार्थक बातचीत और बदलाव करते हुए सम्बन्ध खोजना; और 3) पुराने सम्बन्धों के आधार पर कुछ सार्थक नए पैटर्न या सम्बन्ध बनाना। लेख सन्दर्भ पर बहुत केन्द्रित हो जाने से आने वाली दिक़्क़तों की भी चर्चा करता है। सं.

अपूर्वी 7 साल की है और अभी कक्षा 2 में पढ़ रही है। एक बार मैंने सहज ही उससे पूछ लिया कि अपूर्वी "अगर एक बाल्टी 8 मग पानी से और एक मग 3 गिलास पानी से पूरा भर जाता है, तो वह बाल्टी कितने गिलास पानी से भर जाएगी?" मध्यम वर्गीय भारतीय परिवार में पल-बढ़ रही अपूर्वी की पढ़ाई, कोविड-19 की वजह से स्कूल बन्द होने के कारण घर पर ही हो रही है। वह इस तरह की समस्याओं पर बात करने के लिए ख़ूब उत्सुक रहती है। लेकिन इस प्रश्न को थोड़ा ठिठककर सोचने के बाद उसने नज़रअन्दाज़ कर दिया। अपूर्वी का इस तरह से रुचि न लेना मेरे लिए थोड़ा अप्रत्याशित था क्योंकि गणित की अलग-अलग अवधारणाओं पर मैं उससे बातचीत करता रहता था और यह उसके व मेरे लिए कुछ नए विचारों को बनाने में मददगार होता। बाक़ी इधर-उधर की, उसके दोस्तों, परिवार आदि के बारे में वह हमेशा की तरह सामान्य रूप से बातचीत कर रही थी। फिर उसने बाल्टी, गिलास और मग वाले सवाल की चर्चा में रुचि क्यों नहीं ली? यह जानने के लिए मैंने इस प्रश्न की प्रकृति और संरचना पर सोचना शुरू किया। प्रश्न था, "अगर एक बाल्टी 8 मग पानी से और एक मग 3 गिलास पानी से पूरा भर जाता है, तो वह बाल्टी कितने गिलास पानी से भर जाएगी?" इस प्रश्न की संरचना कुछ इस तरह की है-



चित्र 1

मुझे लगता है कि आम ज़िन्दगी के अनुभवों पर बने इस संरचना के साधारण-से प्रश्न में, गणित पढ़ाने के नज़रिए से बहुत-सी विचार करने वाली बातें निहित हैं। यह गणितीयकरण की प्रक्रिया की ओर बढ़ने का तरीक़ा है। आम जीवन में हमें कई मौक़ों पर इस तरह के प्रश्नों से जूझना होता है। ये प्रश्न यहाँ दिए उदाहरण जैसे भी हो सकते हैं और फ़र्क़ भी, जिनमें कई तरह के अन्य सम्बन्ध व अलग परिस्थितियाँ भी हो सकती हैं।

पर ऐसे सन्दर्भ स्वाभाविक तौर पर सामने आते रहते हैं। स्वाभाविक सन्दर्भों में धीरे-धीरे इस तरह से प्रश्नों की संरचना को भी अमूर्त रूप में रख पाना व ज़रूरत पड़ने पर अपने अनुभवों को ऐसे सम्बन्धों से जोड़ पाना, इस प्रक्रिया को आगे बढ़ाता है। इसके निहितार्थों के बारे में सोचने पर यह बिन्दु सामने आते हैं :

1. इस संरचना जैसी बहुत-सी परिस्थितियों का निर्माण किया जा सकता है। अपनी रोज़मर्रा की ज़िन्दगी में हम पानी, दूध, तेल, दवाई जैसी चीज़ों का इस्तेमाल करने के लिए अलग-अलग आकार के बर्तनों को प्रयोग में लेते हैं। इन बर्तनों की धारिता, आयतन जैसे सम्बन्ध बदलते रहते हैं। बच्चों के खिलौने, डिब्बे, चद्दरें जैसी आसपास की चीज़ों में क्षेत्रफल, लम्बाई, आयतन, आकार आदि के आसानी से देखे और पहचाने जा सकने वाले मात्रात्मक सम्बन्ध होते हैं। इन सम्बन्धों पर आधारित आम ज़िन्दगी की साधारण-सी परिस्थितियों पर सार्थक बातचीत शिक्षक और शिक्षार्थी के लिए कभी-कभी सुन्दर गणितीय विचारों तक पहुँचने, जोड़-तोड़ करके सम्बन्ध खोजने की सहयात्रा बन जाती है। इन सन्दर्भों पर बातचीत बच्चे के गणित सीखने की असीमित सम्भावनाओं के नज़रिए को पुष्ट करती है और साथ-ही-साथ अपने पढ़ाने के तौर-तरीक़ों पर नए सिरे से विचार करने के अवसर देती है।

2. जग, लोटे और गिलास जैसे बर्तनों की धारिता के अन्तर्सम्बन्धों पर लिखी समस्या परिस्थितियों को वास्तविक रूप से करके देखा जा सकता है। ये बर्तन जुटाए जा सकते हैं और पानी से बर्तनों को भरने की गतिविधियाँ करवाई जा सकती हैं। उदाहरण के लिए, बच्चे को गिलास से पहले लोटे को भरने के लिए कहना, फिर लोटे से जग भरने के लिए कहना, स्वयं करके दिखाना या अवलोकन कर बताने के लिए कहना कि एक बर्तन को भरने के लिए दूसरे बर्तन को कितनी बार इस्तेमाल करना पड़ रहा है।

3. यहाँ पर लिखी हुई समस्या परिस्थिति में 'बाल्टी और मग' के बीच का 'भरने का' सम्बन्ध दिया गया और फिर 'मग और गिलास' के बीच का 'भरने का' सम्बन्ध। इन दो सम्बन्धों के आधार पर 'बाल्टी और गिलास' के बीच 'भरने के' तीसरे सम्बन्ध की खोज करनी है। यह प्रश्न "यदि A इंगित करता है B को और B इंगित करता है C को, तो A इंगित करेगा C को" (if A implies B and B implies C, then A implies C) के ढाँचे की तार्किकता पर आधारित है।

अ. एक जग 2 लोटे पानी से पूरा भर जाता है। (A इंगित करता है B को)

b. एक लोटा 2 गिलास पानी से पूरा भर जाता है। (B इंगित करता है C)

c. जग कितने गिलास पानी से भर जाएगा? (क्या A इंगित करेगा C को?)

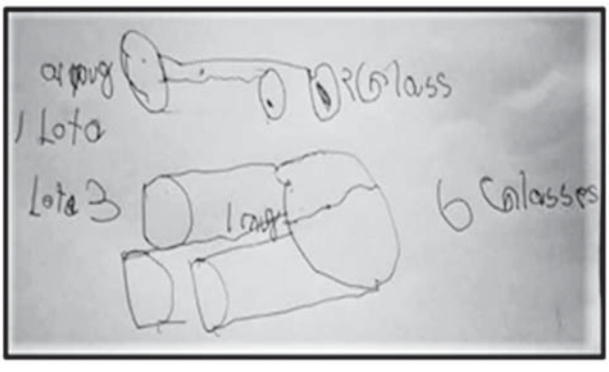
4. गणित, तर्क के आधार पर खोजे गए निष्कर्षों का विषय है। इस संरचना वाली परिस्थितियाँ गणित की आगमनात्मक तर्कशीलता को विकसित करने में मददगार होंगी क्योंकि इनमें कुछ शुरुआती सम्बन्धों की जाँच-पड़ताल करते हुए उत्तर व परिणामों तक पहुँचने की सम्भावना है। गणितीय निष्कर्षों तक पहुँचने में पैटर्न और नियमों को पहचानना, इसके आधार पर अपने लिए गणित के कथन बनाना, बनाए गए कथनों की जाँच-परख करना और इसके लिए इस तरह के तर्क लिखना, कहना, कि साबित हो जाए कि बनाया गया कथन सही है

या ग़लत, गणितीय तरीक़े से सोचने के कुछ ज़रूरी क़दम हैं। लेकिन क्या यह बातें छह साल के बच्चों के लिए भी प्रासंगिक हैं? क्या इस तरह से सोचने के लिए प्राथमिक कक्षाओं में कुछ परिस्थितियाँ बनाई जा सकती हैं? निष्कर्षों पर पहुँचने के लिए आगमन तर्क का इस्तेमाल किस तरह से हो सकता है और समस्या समाधान के दौरान गणितीय संवाद का प्रकार क्या होगा? आगे इस तरह के कुछ प्रश्नों पर बात करेंगे।

मैंने अपूर्वी की हिचकिचाहट के बावजूद उसके साथ इस संरचना के प्रश्नों पर कुछ दिनों तक लगातार बातचीत की। धीरे-धीरे इसमें उसकी रुचि बढ़ी और इसको करते-करते उसने अपने तरीक़े सोचे।

मेरी बातचीत के कुछ अंश

मेरे लिए सन्दर्भों पर बातचीत की शुरुआत करने में कुछ प्रश्न, जैसे कि एक बार प्रश्न को पढ़कर मुझे समझाओ?, प्रश्न से हमें किन-किन चीज़ों का पता चल रहा है?, हमें प्रश्न में क्या पता करना है?, आदि हमेशा ही मदद करने वाले रहे हैं। अपूर्वी ने जब इन तीन प्रश्नों पर अपनी प्रतिक्रिया दे दी तो मैंने पूछा, "बताओ, फिर कैसे पता करें कि एक मग को भरने के लिए हमें कितने गिलास पानी की ज़रूरत पड़ेगी?" थोड़ा सोचने के बाद अपूर्वी ने तेज़ी

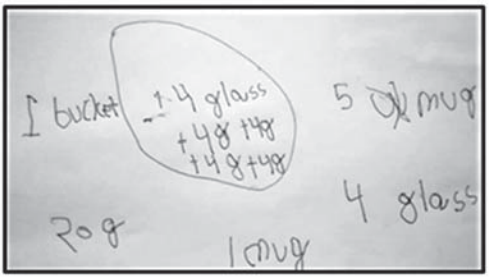


चित्र 2

से गोले जैसी लगभग समान आकार की 2 आकृतियाँ और एक बड़ी आकृति बना दी (चित्र 2)। इसके साथ छोटे गोले जैसी आकृति को बड़े गोले के साथ जोड़ दिया। मैंने प्रश्न किया, "आपने यह क्या बनाया है?" उसने छोटे गोलों की तरफ़ इशारा करते हुए कहा, "ये गिलास हैं और बड़ा गोला लोटा है। (प्रश्न को दिखाते हुए) ये लिखा है न कि 2 गिलास एक लोटे को भरते हैं, मैंने इसी का चित्र बनाया है।" मैंने कहा, "चलो ठीक है, अब आप आगे क्या करोगी?" मेरे सवाल पर बिना कुछ बोले एक पहले से बड़ी गोल आकृति और तीन मध्यम आकार के गोले बना देती है। "अच्छा, मुझे समझा तो दो कि अब आपने क्या बनाया है?" मेरी बात पर थोड़े अविश्वास के भाव के साथ अपूर्वी ने कहा, "देखो प्रश्न में क्या लिखा है? 3 लोटे से एक मग भर जाता है। (बड़े वाले गोले जैसी आकृति की तरफ़ इशारा करते हुए) यह मग है और (बाईं ओर बने छोटे गोले जैसी आकृति के लिए) ये तीन लोटे हैं।" मग और लोटे को मिलाती हुई रेखाओं की तरफ़ इशारा करते हुए अपूर्वी ने फिर दोहराया, "इन तीन लोटों से ये एक मग भर जाएगा।" बातचीत को आगे बढ़ाते हुए मैंने पूछा, "अब आगे क्या करना है?" अपूर्वी प्रश्न को समझ चुकी थी तो उसने कह दिया, "अब पता करना है कि यह मग कितने गिलास से भरेगा?" वह मग के ऊपर रेखा खींचते हुए कहती है, "2 गिलास से तो यहाँ तक भर जाएगा। फिर 2 गिलास से यहाँ तक भर जाएगा।" ऐसा कहने के बाद वह चुप हो गई तो मैंने चुप्पी तोड़ने के लिए पूछ दिया, "आपको कैसे पता चल रहा है कि 2 गिलास से यहीं तक भरेगा? हो सकता है थोड़ा ऊपर तक भर जाए?" थोड़ा सोचने के बाद उसने कहा, "6 गिलास।" अपूर्वी का जवाब (6 गिलास) तो ठीक था लेकिन उसके उत्तर तक पहुँचने की प्रक्रिया को समझने के लिए मैंने पूछा, "आपको कैसे पता चला कि 6 गिलास से ही यह मग भर जाएगा।" अपूर्वी ने अपने बनाए चित्र को साथ में दिखाते हुए कहा, "3 लोटे से एक मग भरता है। 2 गिलास से एक लोटा भरता है। 2 गिलास से एक

लोटा भरता है। 2 गिलास से एक लोटा भरता है (एक ही वाक्य तीन बार)। फिर ये लोटे का पानी डालते हैं मग में। ऐसे पता चलता है कि 6 गिलास से मग भर जाता है।''

अगले प्रश्न ''एक बाल्टी 5 मग पानी से और एक मग 4 गिलास पानी से पूरा भर जाता है, तो वह बाल्टी कितने गिलास पानी से भर जाएगी'' पर उसने कुछ चित्र नहीं बनाए। मैंने पूछा, ''अच्छा, ये बताओ कि सवाल के शुरू में भी तो कुछ लिखा हुआ है। आपने उसका चित्र नहीं बनाया और बीच से पढ़कर उसका ही चित्र क्यों बनाया (चित्र 3)?'' ऐसा करने के पीछे अपूर्वी का तर्क था, ''सवाल के बाद वाले हिस्से में संख्या छोटी है इसलिए यह आसान है।'' इसी तरह एक और प्रश्न पर बात करते हुए मैंने पूछा, ''अपूर्वी,



चित्र 3

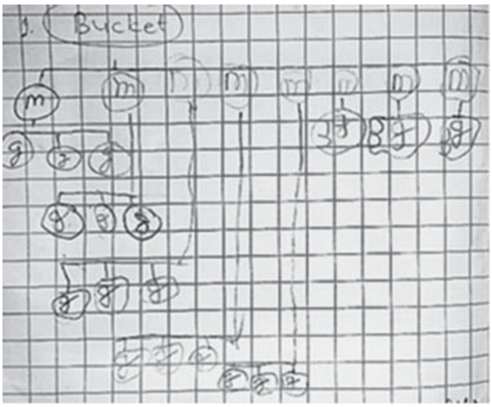
अब इस प्रश्न से हमें किन-किन चीज़ों का पता चल रहा है? और इस प्रश्न में हमें क्या पता करना है?'' इस बार भी अपूर्वी ने प्रश्न को अपने शब्दों में बता दिया। उसने यह भी कहा कि यह सवाल ग़लत है क्योंकि 6 गिलास से एक मग भर जाता है और यहाँ पर 4 गिलास लिखा है। रसोई में रखे अलग-अलग आकार के मग पर थोड़ी बात करके मैंने पूछा, ''बताओ, फिर हम कैसे पता करें कि एक बाल्टी को भरने के लिए हमें कितने गिलासों की ज़रूरत पड़ेगी?'' पिछले प्रश्न में तो वह तुरन्त ही उत्तर तक पहुँचने का प्रयास करने लगी थी, लेकिन इस बार उसने बिना प्रयास के ही कह दिया, ''यह मुश्किल है।'' जब मैंने कोशिश करने का आग्रह किया तो कहने लगी, ''आप बताओ कि बाल्टी को भरने के लिए कितने गिलास की ज़रूरत होगी। आपने यह सवाल लिखा है तो आपको जवाब ज़रूर पता होगा।'' यह मेरे लिए हमेशा मुश्किल स्थिति होती है क्योंकि प्रश्न तो मैंने बनाया है न कि किसी परिस्थिति से वह हमारे सामने आया है। तो उसका कहना ठीक ही है कि ये तो मेरा प्रश्न है। कुछ प्रयास करने पर वह इस प्रश्न पर सोचने के लिए तैयार हो गई।

लेकिन जैसे पिछली बार उसने चित्र बनाए थे, इस बार वैसा तरीक़ा न अपनाकर उसने एक गोला बनाया और बताया कि यह बाल्टी है। फिर कहने लगी, ''मुझे अब बार-बार चित्र बनाने की ज़रूरत नहीं है इसलिए मैं अब मग लिखूँगी।'' इसके बाद उसने लिखा, 'एक मग और 4 गिलास' जोकि प्रश्न के अनुसार था। मैंने फिर पूछा, ''एक बाल्टी कितने गिलास से भर जाएगी यह जानने के लिए क्या करना पड़ेगा?'' थोड़ा सोचने और अंगुलियों पर गिनने के बाद अपूर्वी ने जवाब दिया, ''8 गिलास से भर जाएगी।'' इस उत्तर पर उसका ध्यान दिलाने के लिए मैंने पूछा, ''आपको कैसे पता चला कि 8 गिलास से बाल्टी भर जाएगी?'' अपूर्वी ने अंगुलियों पर कुछ गिनते हुए बताने की कोशिश की कि एक मग के 4 गिलास, दूसरे मग के भी 4 गिलास, लेकिन उसे भी इस बात का आभास था कि वह कुछ उलझ गई है। इसलिए मैंने प्रस्ताव रखा कि वह जो कह रही है उसे साथ में नोट भी करें तो कैसा रहेगा? उसने उस प्रस्ताव को यह कहकर स्वीकार कर लिया मैं लिख लूँगी लेकिन गिलास पूरा न लिखकर उसका केवल 'g' ही लिखूँगी।

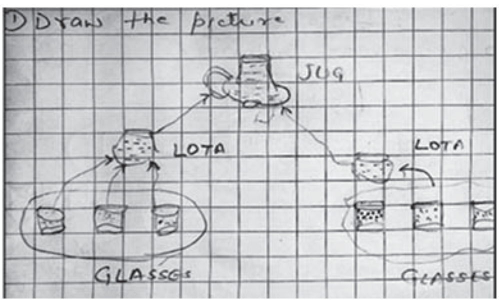
गिलास के लिए 'g' लिखने की बात मेरी पहले भी उससे हुई थी (चित्र 4), तब लगा था कि इस आयु वर्ग में इस तरह के संकेतों का इस्तेमाल नहीं करना चाहिए। काफ़ी दिन पहले की बात का इस तरह से प्रयोग होना सुखद अनुभव था कि जटिल विचारों पर अगर सार्थक बातचीत होती है तो वह मस्तिष्क के किसी कोने में रहते हैं। बात आगे बढ़ाते हुए चित्र पाँच की परिस्थिति पर हमारी बातचीत हुई। उससे पूछा, ''प्रश्न मुझे समझा सकती हो और इसका चित्र भी बना सकती हो?'' अपूर्वी ने प्रश्न को अपने

शब्दों में बता दिया और थोड़ी देर के बाद उसने चित्र बना दिया (चित्र 5)। चित्र पर बोलते हुए उसने कहा, "मैंने पहले बनाया है कि दो लोटे से एक मग भर रहा है और फिर बनाया है तीन गिलास से एक लोटा भर रहा है।" इस प्रश्न पर कि जग कितने लोटे से भरेगा, उसने कहा, "पहले एक लोटे को भरेंगे तो तीन गिलास पानी डालेंगे। फिर दूसरा लोटा पानी डालेंगे तो जग भर जाएगा। इसलिए 6 गिलास पानी से जग भरेगा।" इस तरह की परिस्थितियों पर बातचीत करना अब हमारे लिए कुछ सहज लग रहा था।

सन्दर्भों के अर्थ निर्माण का ढाँचा



चित्र 4



चित्र 5

अपूर्वी के साथ काम करने के अलावा विविध आयु वर्ग, अनुभव क्षेत्र के व्यक्तियों और समूह के साथ किए गए काम के अनुभव आधार पर कह सकते हैं कि सन्दर्भों में मौजूद अमूर्त गणितीय विचारों को जानने-समझने की यात्रा के तीन महत्त्वपूर्ण पड़ाव होते हैं, जिनमें सबसे पहला पड़ाव, सन्दर्भों में निहित अमूर्त विचारों का निरूपण करना; दूसरा, निरूपण पर सार्थक बातचीत और बदलाव करते हुए सम्बन्धों को खोजना; और तीसरा पड़ाव, पुराने सम्बन्धों के आधार पर कुछ सार्थक नए पैटर्न या सम्बन्धों को कहना है। यह बात ध्यान देने की है कि सन्दर्भ क्या हैं, किस तरह के सन्दर्भ कारगर हो सकते हैं, इसकी सीमाएँ क्या होती हैं?, जैसे प्रश्नों पर भी विचार करना उपयोगी होगा।

पड़ाव एक : सन्दर्भों में निहित अमूर्त विचारों का निरूपण करना

अपूर्वी द्वारा बनाए चित्रों को देखकर हम सोच सकते हैं कि वह चित्र एक में दी गई संरचना के प्रश्नों पर एक स्तर की प्रतिक्रिया दे पा रही है। दैनिक जीवन से जुड़े इस तरह के प्रश्नों को सार्थक रूप से समझने के लिए सन्दर्भों पर बातचीत, और निरूपण का होना बहुत मददगार होता है। गणित की कक्षाओं में सार्थक सन्दर्भों के साथ गणित में काम करने की मंशा के साथ बच्चों के लिए एक-दो पंक्ति के प्रश्न बना दिए जाते हैं। और इन प्रश्नों को जीवन से जुड़ाव का तरीक़ा मान लिया जाता है। पाठ्यपुस्तकों में भी इस तरह के उदाहरण बहुतायत में लिखे होते हैं। उदाहरण के लिए, पाठ्यपुस्तक में लिखा एक प्रश्न है, "एक वर्गाकार बग़ीचे की बाड़ की लम्बाई 20 मीटर है। बग़ीचे की एक साइड कितनी लम्बी होगी?" इस आलेख में लिया गया प्रश्न भी ऐसा ही दो पंक्ति का है। एक बार इस प्रश्न पर अपूर्वी ने कहा था कि जब आपने सवाल लिखा है तो उत्तर भी आपको पता होगा। आप ही बता दो कि एक बाल्टी को भरने के लिए कितने गिलास की ज़रूरत होगी? वह ऐसा क्यूँ कह रही है? यदि मैं इस सवाल पर चर्चा शुरू नहीं करता और उसे यह दो पंक्ति का सवाल दिखाई देता, तो क्या वह इसका हल ढूँढ़ने को उत्सुक होती?

बच्चों के सीखने को लेकर इस प्रकार की परिस्थितियों की अपनी सीमाएँ होती हैं क्योंकि इसमें कुछ भी आगे-पीछे की बात किए बिना मूल समस्या लिख दी गई है। आगे-पीछे की बात का अर्थ ऐसे सवालों के जवाब होने से है कि आलेख में लिए गए प्रश्न में एक बाल्टी को 8 मग पानी से क्यों भरा जा रहा है? फिर मग को गिलास से क्यों भर रहे हैं? क्या जीवन में ऐसी घटना होती है जब इस तरह एक बर्तन को दूसरे बर्तन से भरने की ज़रूरत पड़ती है? क्या जीवन में वास्तविक रूप से ऐसी परिस्थिति होती है जहाँ पर कुछ पानी, दूध जैसी चीज़ों को भरने का काम होता है? अगर हाँ, तो क्या उस बात को सम्पूर्णता में लिखना इस सन्दर्भ को और अर्थपूर्ण नहीं बना देगा?

गणित में हम लगातार अवधारणाओं और सम्बन्धों पर काम करते हैं। एक शिक्षिका जब कक्षा में 2 पत्तियाँ, 2 कंकड़, 2 कटोरी, 2 पेंसिल आदि दिखाकर शिक्षार्थियों से बातचीत करती हैं तो वह उनकी 2 पत्तियाँ, 2 कंकड़, 2 कटोरी, 2 पेंसिल आदि में '2 होने का' अमूर्त गुण ढूँढ़ने में मदद कर रही होती हैं। दूसरे शब्दों में कहें तो, वह 2 की अवधारणा पर काम कर रही होती हैं जो कि मानवीय दिमाग़ की रचना है। वहीं दूसरी ओर, एक कंचे से शुरू करके उसमें एक और कंचा मिलाकर 2 कंचे, 2 में एक और कंचा मिलाकर 3 कंचे जैसी प्रक्रिया में संख्या की मात्रा के साथ '1 और 2 में 1 ज़्यादा होने' के सम्बन्ध पर भी काम हो रहा होता है। गिनती की संख्याओं में एक ज़्यादा होने का दैनिक जीवन का सन्दर्भ पानी की टोंटी से टपकती बूँदें हैं। लेकिन क्या ऐसा हमेशा सम्भव होगा कि हम गणित के सभी सम्बन्धों, हर अवधारणा के लिए वास्तविक जीवन की वास्तविक परिस्थिति गढ़ दें? उदाहरण के लिए, संख्या 123 में लिखे गए अंक 1, 2 और 3 का मूल्य इनके लिखने की जगह की वजह से बदल जाता है। इस संख्या में अंक 3 इकाई, 2 'दस-दस' का समूह और 1 सौ का समूह दर्शा रहे हैं। यानी, संख्या में जगह का मान बाईं तरफ़ 10 गुने बढ़ता जा रहा है। बच्चे के अनुभव क्षेत्र में ऐसी परिघटना होना मुश्किल है जो इतने सुसंगत और नियमबद्ध तरीक़े से 10 गुने में समूह बनाती जाए और हमेशा उसका पालन करे। इसलिए गणित के सन्दर्भ हर बार वास्तविक जीवन से हों, यह भी ज़रूरी नहीं है। बल्कि गणित के अर्थपूर्ण सीखने-सिखाने के लिए वास्तविक सन्दर्भों के आग्रह की बजाय बहुत बार सम्पूर्णता में लिखे वास्तविक लगने वाले सन्दर्भ ज़्यादा उपयोगी होते हैं। उदाहरण के लिए, संख्या के स्थानीय मान के नियम पर बातचीत करने के लिए एक बढ़ई के तख़्तों को सजाने का वास्तविक लगने वाला सन्दर्भ लिया जा सकता है कि बढ़ई अपने लकड़ी के तख़्तों को 10 के समूह में रखता है और बाज़ार ले जाने के लिए एक ट्रक में 100 तख़्ते, दस-दस के दस बण्डलों में रखता है।

गणित की कक्षाओं में सार्थक सन्दर्भों के साथ गणित में काम करने की मंशा के साथ बच्चों के लिए एक-दो पंक्ति के प्रश्न बना दिए जाते हैं। और इन प्रश्नों को जीवन से जुड़ाव का तरीक़ा मान लिया जाता है। पाठ्यपुस्तकों में भी इस तरह के उदाहरण बहुतायत में लिखे होते हैं।

पड़ाव दो : निरूपण पर सार्थक बातचीत और बदलाव करते हुए सम्बन्धों को खोजना

सन्दर्भों पर बातचीत, विचारशील प्रश्न और निरूपण सीखने-सिखाने की प्रक्रिया को अर्थपूर्ण बना देते हैं। इन प्रश्नों पर अपूर्वी बातचीत कर पा रही है, इसके पीछे एक कारण उसके द्वारा गोले जैसी बनाई गई आकृतियाँ हैं। सन्दर्भों पर लिखी समस्या परिस्थिति के मानसिक ख़ाके / छवि (मेंटल मॉडल) के चित्र बनाना, उस समस्या परिस्थिति में निहित अमूर्त गणितीय विचारों को

समझने में मदद करने वाला होता है। ये निरूपण गणित की कक्षा की चित्रकारी है। यह सृजनात्मक कला, स्कूली पाठ्यक्रम का अभिन्न हिस्सा होना चाहिए क्योंकि इन गतिविधियों में मानसिक कौशलों, शारीरिक दक्षताओं और भावनाओं की अभिव्यक्ति का समन्वय होता है। अपूर्वी द्वारा बनाई गई गोले जैसी आकृति उसके मेंटल मॉडल का एक रूप है। गणित के विचारों और सम्बन्धों के चित्र बनाने के लिए दिए अवसर स्वतंत्र अभिव्यक्ति को बढ़ावा देते हैं और सीखने वाले के दृष्टिकोण को समझने में मदद करने वाले होते हैं। उदाहरण के लिए, अपूर्वी के बनाए गए जग, लोटे और गिलास के चित्रों के आकार में अनुपात रखने की कोशिश तो की गई है लेकिन चित्र चार और पाँच में बर्तन की धारिता और आकार के बीच के सम्बन्ध पर बातचीत की ज़रूरत लगती है।

सार्थक संवाद में अच्छे प्रश्नों की भूमिका महत्त्वपूर्ण होती है। लेकिन कई बार सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में लगातार बातचीत करते हुए हमारे सवाल इस तरह के बन जाते हैं कि एक के बाद दूसरे सवाल का जवाब देते हुए सीखने वाला ख़ुद-ब-ख़ुद उत्तर तक पहुँच जाता है। लेकिन इस सवाल-जवाब में ज़रूरी नहीं कि सीखने वाले की पूरे सन्दर्भ की समझ बन रही हो। कई बार वह अवधारणाओं के बीच सभी ज़रूरी अन्तर्सम्बन्धों को नहीं जान पाता है और उस हिस्से का ही जवाब देता है। इसलिए आकलन में यदि वही सवाल दे दिया जाए तो वह स्वतंत्र रूप से उस प्रश्न का उत्तर नहीं ढूँढ़ पाता है जिसे वह इस आभासी स्केफ़फ़ोल्डिंग की प्रक्रिया में हल कर चुका होता है।

सार्थक संवाद में अच्छे प्रश्नों की भूमिका महत्त्वपूर्ण होती है। लेकिन कई बार सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में लगातार बातचीत करते हुए हमारे सवाल इस तरह के बन जाते हैं कि एक के बाद दूसरे सवाल का जवाब देते हुए सीखने वाला ख़ुद-ब-ख़ुद उत्तर तक पहुँच जाता है। लेकिन इस सवाल-जवाब में ज़रूरी नहीं कि सीखने वाले की पूरे सन्दर्भ की समझ बन रही हो।

सन्दर्भों पर बातचीत और निरूपण में कुछ संकेतों का इस्तेमाल वयस्कों के लिए बहुत सामान्य लगता है लेकिन प्रारम्भिक स्तर पर सीखने वालों के लिए वह काफ़ी अमूर्त हो जाता है। उदाहरणार्थ, मग के लिए 'm' और गिलास के लिए 'g' लिखकर दी गई समस्या परिस्थिति पर काम करना अमूर्तता के अलग स्तर की माँग करता है। यदि शिक्षार्थी को, '8 मग से एक बाल्टी भर जाती है', सम्बन्ध पर विचार करना है तो उसे लिखे हुए से हर बार डिकोड करना पड़ेगा कि 'm' और 'g' क्या है। सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में कई बार सुगमकर्ता को इस तरह की बातें साधारण-सी लगती हैं और उस तरफ़ उसका ध्यान नहीं जाता। शिक्षार्थी के अनुभव क्षेत्र का विचार न होने की वजह से, स्वतंत्र रूप से विचार रखने की परम्परागत लोकतांत्रिक कक्षा में भी वे उनको समझने में आ रही परेशानी पर कुछ कह नहीं पाएँगे। नतीजतन पठन-पाठन से यह समस्या पकड़ में नहीं आ पाती।

इसके अलावा, दी गई समस्या परिस्थिति में सम्बन्धों को जानने के लिए जोड़ और गुणा की संक्रियाओं को अमल में लाने की ज़रूरत पड़ेगी। इन अन्तर्सम्बन्धों पर बातचीत करने के लिए विविध निरूपणों का उपयोग किया जा सकता है। संख्या 65, या संक्रिया 6 × 5 का चित्र कैसे बना सकते हैं? इस तरह के सवाल सुनने वाले को चौंका देते हैं क्योंकि कम-से-कम अंकगणित में संख्याओं और उनके सम्बन्धों के निरूपण की प्रक्रियाएँ सामान्य रूप से कक्षाओं में नहीं होती हैं। लेकिन गणित के सभी क्षेत्रों में जैसे कि संख्या 65 के निरूपण को 6 लम्बे आयताकार टाइल (जिसमें हर लम्बे आयताकार टाइल को 10 छोटे आयतों को मिलाकर बनाया गया) और 5 छोटे आयताकार टाइल बनाया जाना या संक्रिया 6 × 5 को दर्शाने

के लिए 6-6 वृत्तों के 5 समूह बनाना, अवधारणा की समझ का आकलन करने में मददगार तो होते ही हैं साथ-ही-साथ उस अवधारणा के अमूर्त पहलुओं को सामने लाने में मदद करने वाले होते हैं। इस दौरान उनके आपसी रिश्तों पर बातचीत के पर्याप्त अवसर हैं।

पड़ाव तीन : पुराने सम्बन्धों के आधार पर कुछ सार्थक नए पैटर्न या सम्बन्धों को कहना

सीखने-सिखाने की प्रक्रिया में अपूर्वी के द्वारा बनाए गए चित्र को देखकर पूरे आत्मविश्वास से दिया गया जवाब कि, "सबसे पहले एक जग है और इस जग को इन दो लोटों से भर सकते हैं। फिर तीन गिलास से एक लोटा भर रहा है। दूसरा लोटा भी तीन गिलास से भरेगा। इसलिए जग को भरने के लिए 6 गिलास की ज़रूरत होगी", या "एक लोटा 3 गिलास से भर रहा है तो 2 लोटे 6 गिलास से, 3 लोटे 9 गिलास से, 5 लोटे 15 गिलास से..." गणितीय संवाद और नए पैटर्न को बनाए जाने की बानगी है।

एक बाल्टी को भरने के लिए 3 और 3 गिलास चाहिए। 3 और 3 गिलास को 3 + 3 लिखेंगे। क्या इसको गुणा के रूप में लिखने के प्रश्न पर यह कहना, कि 3 को दो बार जोड़ रहे हैं इसलिए इसे 3 × 2 लिख सकते हैं, इस बात का प्रमाण है कि सीखने वाले ने जोड़ को मिलाने की प्रक्रिया के रूप में समझा है, और इसी प्रक्रिया में दो समूह एक साथ रख रहे हैं इसलिए यहाँ पर गुणा भी हो रहा है। गणित की विविध अवधारणाएँ आपस में अन्तर्सम्बन्धित होती हैं। इसका एक छोटा-सा उदाहरण जोड़ की संक्रिया का गुणा की संक्रिया से सम्बन्ध है। बेहतर गणित सीखने में इन अन्तर्सम्बन्धों को जानना, इनकी खोज करना बहुत ज़रूरी है।

मुझे लगता है, दैनिक जीवन के सार्थक सन्दर्भों पर निरूपण करते हुए खोजबीन की प्रक्रिया से हर प्रकार के सम्बन्ध सीखने वाला खोज ले, यह भी ज़रूरी नहीं है। इस सन्दर्भ पर बातचीत करते हुए हम बराबर होने के सम्बन्ध पर बात कर रहे थे। ऐसा लगता है, यह निष्कर्ष निकालने के बाद, कि 'समूह एक', 'समूह दो' के बराबर है, ऐसा कहना कि 'समूह दो', 'समूह एक' के बराबर होगा, एक 6 से 7 साल आयु वर्ग के बच्चे के लिए बहुत स्वाभाविक नहीं होता है। उदाहरण के लिए, एक लोटे का 2 गिलास से भरना के आधार पर कहना कि 2 गिलास एक लोटे को भरेंगे।

अन्त में

आलेख में ली गई समस्या परिस्थिति में दिए कथन, कि "एक लोटा 2 गिलास पानी से पूरा भर जाता है", को A इंगित करता है B को, के दृष्टिकोण से भी समझ सकते हैं। यहाँ पर यह पड़ताल फिर दिलचस्प हो जाती है कि अगर A इंगित करता है B को, तो क्या हर बार B इंगित करेगा A को? दो बर्तनों में द्रव भरने के सन्दर्भ के लिए तो यह सम्बन्ध सच है, लेकिन सम्बन्ध बदलकर उसकी जगह पर 'चाचा होने' का सन्दर्भ कर दिया तो यह सम्बन्ध ठीक नहीं होगा। कुल मिलाकर यह कहा जा सकता है कि यह साधारण-सी परिस्थिति क्या बड़ी कक्षाओं में पढ़ाए जाने वाले अमूर्त अवधारणा तुल्यता सम्बन्ध के विमर्श को प्रारम्भ करने के लिए काफ़ी उपयोगी हो सकती है।

अशोक प्रसाद ने हेमवती नंदन बहुगुणा, गढ़वाल विश्वविद्यालय से गणित में स्नातकोत्तर किया है। वे बच्चों और शिक्षकों के साथ विगत 14 वर्षों से गणित शिक्षण पर कार्य कर रहे हैं। वर्तमान में अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन पौड़ी गढ़वाल में गणित के स्रोत व्यक्ति के रूप में कार्यरत हैं।

सम्पर्क : ashok.prasad@azimpremjifoundation.org